Aufgabe 4: (ausführliche Lösung)

a) $x^2 \underbrace{-6}x \underbrace{-187} = 0$

vor dem x^2 steht eine „unsichtbare" 1, weshalb wir direkt die pq-Formel anwenden können.

$p = -6 \qquad q = -187$

Formel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

jetzt setzen wir p und q in die Formel ein.

$x_{1/2} = -\left(\frac{-6}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - (-187)}$

→ dies könnt ihr in den TR eingeben oder noch etwas vereinfachen.

$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 + 187}$

$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{196}$

$x_{1/2} = 3 \pm 14$

$x_1 = 3 + 14 \quad \vee \quad x_2 = 3 - 14$

$\underline{\underline{x_1 = 17}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_2 = -11}}$

$\mathbb{L} = \{-11; 17\}$

Mit diesen x-Werten kannst du ein Probe durchführen, um zu überprüfen, ob du richtig gerechnet hast.

Probe: $x_1 = 17$ in die Ausgangsgleichung einsetzen.

$x^2 - 6x - 187 = 0$

$\underbrace{17^2 - 6 \cdot 17 - 187}_{\text{ausrechnen}} = 0$

$0 = 0$ ✓

$x_2 = -11$ in die Ausgangsgleichung einsetzen.

$(-11)^2 - 6 \cdot (-11) - 187 = 0$

$0 = 0$ ✓

Probe ist in Ordnung!

i) (ausführliche Lösung)

$$2x^2 - 3x - 104 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{104}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 52 = 0 \quad | \text{pq-Formel}$$

Falls vor dem x^2 keine 1 steht, müssen wir die ganze Gleichung durch den Vorfaktor (hier 2) dividieren.

$p = -\frac{3}{2} \qquad q = -52$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1/2} = -\frac{-\frac{3}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{3}{2}}{2}\right)^2 - (-52)} \quad | \text{vereinfachen oder TR benutzen}$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{4}\right)^2 + 52}$$

$$\underline{\underline{x_1 = 8}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_2 = -6{,}5}}$$

An dieser Stelle kannst du die Probe selbstständig durchführen.

$\mathbb{L} = \{-6{,}5;\ 8\}$

c) kein Element...

4. a) L = {17; −11}
b) L = {12; −3,75}
c) L = {8}
d) L = {4; −13}
e) L = {0; −4}
f) Fehler in der 1. Auflage: $x^2 + 10{,}8x - 63 = 0$
L = {4,2; −15}
g) L = {4; 3}
h) $L = \left\{\frac{-(\sqrt{33}+5)}{2};\ \frac{\sqrt{33}-5}{2}\right\}$
i) L = {8; −6; 5}
j) $L = \left\{\frac{8}{3};\ -1{,}2\right\}$
k) L = { }
l) L = { }
m) L = {0; −7}
n) L = {0; −2,8}
o) L = {2,4}

5. Falsch: Er versucht die Gleichung wie eine des Typs $T_1 \cdot T_2 = 0$ zu lösen, da dieser Typ nicht vorliegt, ist der Ansatz falsch. Teile der Ausführung ebenso. Richtig: $L = \left\{-\sqrt{5}+2;\ \sqrt{5}+2\right\}$.

6. a) $L = \left\{\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right\}$
b) $L = \left\{0;\ -\frac{16}{9}\right\}$
c) L = {15; 2}
d) $L = \left\{-\frac{7}{2};\ -4\right\}$
e) L = {5; −11}
f) L = {2; −2}
g) $L = \left\{\frac{12}{5};\ 0\right\}$
h) L = {8; 1}
i) $L = \left\{7;\ -\frac{13}{3}\right\}$
j) L = {8; 3}
k) $L = \left\{\frac{5}{2};\ -2\right\}$
l) $L = \left\{\frac{7}{2};\ -\frac{2}{7}\right\}$

Vertiefende Aufgaben und Anwendungen

Nachdem wir nun die pq-Formel bei quadratischen Gleichungen anwenden können, versuchen wir uns an vertiefenden Aufgaben.

Aufgabe: Für welche Werte von a besitzt die angegebene Gleichung

(1) genau eine Lösung (2) zwei Lösungen (3) keine Lösung?

a) $x^2 + ax + 4 = 0 \quad | pq$

a ist ein sogenannter Parameter, der für eine Zahl aus $\mathbb{R}$ (den reellen Zahlen) steht.
Wir versuchen die pq-Formel anzuwenden und behandeln a wie eine „normale" Zahl.

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4}_{\text{Diskriminante}}}$$

Diskriminante: (1) Die Diskriminante ist Null, dann gibt es genau eine Lsg.

(2) Die Diskriminante ist positiv, dann gibt es zwei Lösungen

(3) Die Diskriminante ist negativ, dann gibt es keine Lösung.

Diskriminante:

(1) $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$\frac{a}{2} = \pm 2 \quad | \cdot 2$

$a = \pm 2$

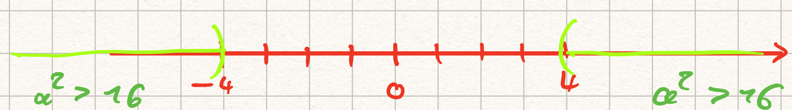
Also gibt es genau eine Lsg., wenn $a = 2$ oder $a = -2$ ist.

(2) $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4 > 0 \quad | +4$

$\frac{a^2}{4} > 4 \quad | \cdot 4$

$a^2 > 16 \quad | \sqrt{\ }$

Überlegung:



a^2 ist größer als 16, wenn $a > 4$ oder $a < 4$

Bitte klarmachen ◡̈

(3) $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4 < 0$

Den Fall (3) sollst du dir nun selbst erarbeiten.

$\vdots$

Versuche nun (wie im Bsp.) folgende Gleichung:

$x^2 + 2x - a = 0 \quad , \quad a \in \mathbb{R}$

Bearbeite anschließend folgende Aufgabe.

5. Gegeben ist die quadratische Funktion mit:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ **b)** $f(x) = -x^2 - 10x - 21$ **c)** $f(x) = -4x^2 + 20x - 25$

(1) Bestimme die Nullstellen der Funktion.

(2) Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel und stelle fest, ob der Scheitelpunkt der höchste oder der tiefste Punkt der Parabel ist.

(3) Welcher Punkt Q_1 der betreffenden Parabel liegt auf der y-Achse? Welcher Parabelpunkt Q_2 hat die gleiche 2. Koordinate wie Q_1?

(4) An welchen Stellen x wird der Funktionswert 4 angenommen?